Phénomènes de dispersion et onde dans un plasma

I Équation de propagation linéaire

Une équation de propagation linéaire a pour solution une superposition d'ondes planes pseudo-progressives harmoniques de la forme

$$\underline{y}(x,t) = \underline{A}\exp(i(\omega t - kx))$$

où $k = k'(\omega) + ik"(\omega)$ et donc

$$\underline{y}(x,t) = \underline{A}\exp(i(\omega t - k'x))\exp(-k"x)$$

qui comporte un terme de propagation et un terme d'absorption.
La propagation se fait avec une vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ qui dépend à priori de ω.

II Propagation dispersive d'une onde non harmonique

Dans cette section, on négligera le phénomène d'absorption.

II.1 Limites de la description en OPPH

Une onde physique est nécessairement limitée dans le temps et dans l'espace, ce qui n'est pas le cas d'une onde plane progressive harmonique. La notion de paquet d'onde permet de rendre compte des limitations temporelle et spatiale de l'onde.

II.2 Superposition de deux OPPH

On commence par étudier la superposition de deux OPPH de même amplitude, non déphasées, de pulsations proches ω_1 et ω_2 et de même direction de propagation, dans le sens des x croissants. On considère que le milieu est peu dispersif ce qui nous permettra de faire des développements au premier ordre. On note donc $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ et $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0$ avec $\delta\omega \ll \omega$. On note les nombre d'onde $k_0 = k(\omega_0)$ et

$$\begin{cases} k_1 = k\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) - \frac{\delta\omega}{2}\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} = k_0 - \frac{\delta\omega}{2}\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \\ k_2 = k\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) + \frac{\delta\omega}{2}\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} = k_0 + \frac{\delta\omega}{2}\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \end{cases}$$

L'onde s'écrit alors

$$y(x,t) = y_0\cos(\omega_1 t - k_1 x) + y_0\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

En utilisant la relation $\cos(a) + cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$, on obtient

$$y(x,t) = 2y_0\cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x + \omega_2 t - k_2 x}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x - (\omega_2 t - k_2 x)}{2}\right)$$

soit en développant

$$y(x,t) = 2y_0\cos\left(\frac{2\omega_0 t - (k_1+k_2)x}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta\omega t - (k_1-k_2)x}{2}\right)$$

En utilisant les développements limités au premier ordre de k_1 et k_2

$$k_1 + k_2 = 2k_0 \quad ; \quad k_1 - k_2 = \delta\omega \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$$

on obtient

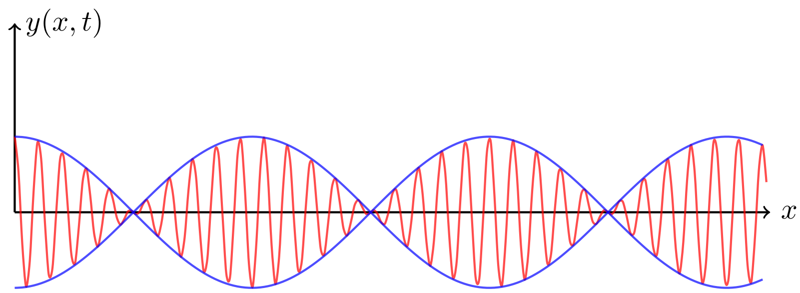
$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right) \cos\left(\frac{\delta\omega t - (\delta\omega \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0})x}{2}\right)$$

que l'on réécrit

$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\omega_0 \left[t - \frac{k_0}{\omega_0}x\right]\right) \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right]\right)$$

Le premier terme représente une propagation vers les x croissants, avec une pulsation ω_0 et une vitesse de propagation $\frac{\omega_0}{k_0}$. le second terme représente une propagation vers les x croissants, avec une pulsation $\delta\omega/2$ et une vitesse de propagation $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$.

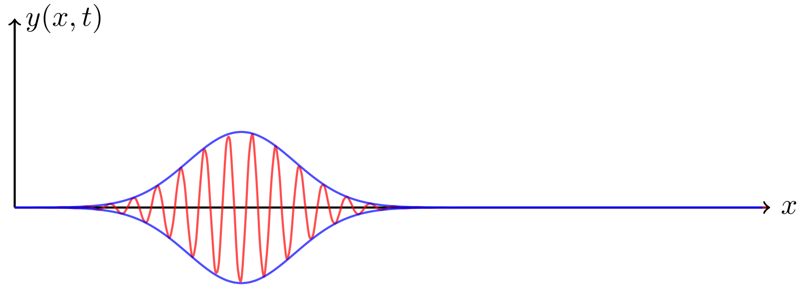
L'onde se présente donc comme un signal sinusoïdal à haute fréquence ω_0 modulé par un signal sinusoïdal à basse fréquence $\delta\omega/2$. Le signal à haute fréquence se propage à la vitesse $\frac{\omega_0}{k_0}$, le signal à basse fréquence à la vitesse $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$.



Remarque On peut retrouver ce résultat en utilisant les notations complexes et en faisant apparaître les termes en 1/2 dans les exponentielles complexes. En effet

$$\begin{aligned}
\cos(a) + cos(b) &= \tfrac{1}{2}\left[\exp(ia) + \exp(-ia) + \exp(ib) + \exp(-ib)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}[\exp(ia/2 + ia/2 + ib/2 - ib/2) + \exp(-ia/2 - ia/2 + ib/2 - ib/2) \\
&\quad + \exp(ib/2 + ib/2 + ia/2 - ia/2) + \exp(-ib/2 - ib/2 + ia/2 - ia/2)] \\
&= \tfrac{1}{2}[\exp(ia/2 + ib/2)\exp(ia/2 - ib/2) + \exp(-ia/2 + ib/2)\exp(-ia/2 - ib/2) \\
&\quad + \exp(ib/2 + ia/2)\exp(ib/2 - ia/2) + \exp(-ib/2 + ia/2)\exp(-ib/2 - ia/2)] \\
&= \tfrac{1}{2}[\exp(ia/2 + ib/2)(\exp(ia/2 - ib/2)\exp(ib/2 - ia/2)) \\
&\quad + \exp(-ia/2 - ib/2)(\exp(-ia/2 + ib/2) + \exp(-ib/2 + ia/2))] \\
&= \tfrac{1}{2}[\exp(ia/2 + ib/2)(2\cos(a/2 - b/2)) \\
&\quad + \exp(-ia/2 - ib/2)(2\cos(a/2 - b/2))] \\
&= 2\cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

II.3 Paquet d'onde



Un paquet d'onde est une superposition d'un nombre infini d'OPPH dont les pulsations sont comprises dans l'intervalle $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$. Le caractère continu de l'intervalle de pulsation transforme l'opération de sommation en intégrale et fait apparaitre la version continue de la série de Fourier, la transformée de Fourier :

$$\underline{y}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) \exp(i(\omega t - kx))\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \hat{y}(\omega) \exp(i(\omega t - kx))\, d\omega$$

où le terme $\hat{y}(\omega)$ est mathématiquement la transformée de Fourier de $\underline{y}(x,t)$ et est appelé densité spectrale d'amplitude. $\hat{y}(\omega)$ dépend du processus d'émission et caractérise le caractère plus ou moins monochromatique de la source (donc sa cohérence temporelle !).
En supposant la largeur spectrale $\Delta\omega$ petite et le milieu faiblement dispersif, on peut linéariser la relation de dispersion au voisinage de ω_0

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} = k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$$

On peut alors réécrire le terme exponentiel de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\exp(i(\omega t - kx)) &= \exp\left(i\left(\omega t - \left(k_0 + (\omega - \omega_0)\left(\tfrac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)x\right)\right) \\
&= \exp\left(i\left(\omega t - \omega_0 t + \omega_0 t - k_0 x + (\omega - \omega_0)\left(\tfrac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right)\right) \\
&= \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \exp\left(i((\omega - \omega_0)t + (\omega - \omega_0)\left(\tfrac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right) \\
&= \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \exp\left(i(\omega - \omega_0)\left[t - \left(\tfrac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right]\right)
\end{aligned}$$

Le terme $\exp(i(\omega_0 t - k_0 x))$ peut être sorti de l'intégrale puisqu'il ne dépend pas de ω, d'où

$$\underline{y}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y} \exp\left(i(\omega - \omega_0)\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right]\right)$$

où on peut mettre l'intégrale sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y} \exp\left(i(\omega - \omega_0)\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right]\right) = F\left(t - \frac{x}{\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}}\right)$$

On a alors

$$\underline{y}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) F\left(t - \frac{x}{\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}}\right)$$

II.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe

On retrouve le terme en exponentielle correspondant à une propagation à la vitesse de phase

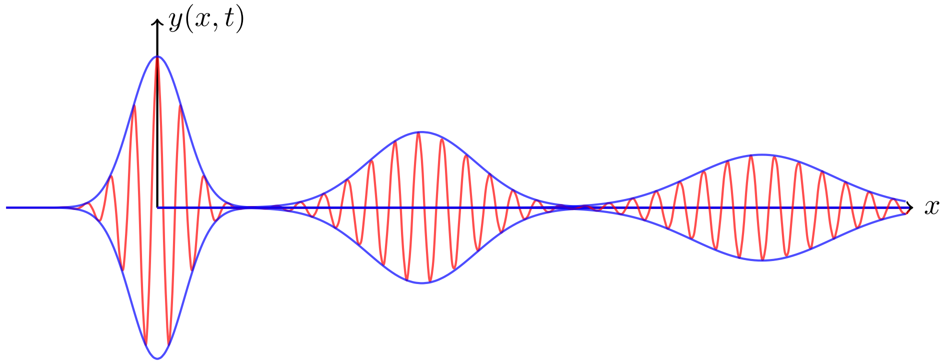
$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

La fonction F correspond à l'enveloppe, dont la vitesse, qui correspond à la vitesse de déplacement du paquet d'onde, est appelée **vitesse de groupe**

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

II.5 Étalement du paquet d'onde

Si on décompose le paquet d'onde en OPPH, chacune va se propager à une vitesse donnée par la relation de dispersion. Il va donc y avoir déformation qui va donner un étalement du paquet d'onde lors de la propagation.



III Propagation d'une onde EM dans un plasma

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé composé d'électrons et de cations que l'on peut rencontrer par exemple dans la haute atmosphère (ionosphère et magnétosphère). Le vent solaire, flux de particules chargées émis par le Soleil peut aussi être considéré comme un plasma. Ces deux types de plasmas sont des plasmas **dilués**. Des plasmas **denses** constituent le Soleil et le cœur des expériences de fusion nucléaires basées sur la technologie tokamak. De manière plus proche de nous, les lampes dites au néon et les écrans plasma sont basé sur cet état de la matière appelé parfois quatrième état.

III.1 Modélisation du plasma

Dans le cadre du programme, on se limitera à un modèle simple du plasma :

- on considère un milieu dilué dans lequel on néglige les interactions entre particules chargées par rapport à l'interaction avec le champ électromagnétique,
- les ions sont considérés comme immobiles, et donc ne participent pas à la conductivité du plasma,
- le plasma est constitué d'ions de masse M, de densité de particules n_i et de charge e, et d'électrons de masse m, de densité de particules n_e et de charge $-e$. En l'absence d'onde, la charge totale est nulle et le milieu est localement neutre, ce qui impose $n_i = n_e = n_0$,
- On considère la propagation d'une onde plane pseudo-harmonique transversale dans le plasma,
- le mouvement des électrons est décrit par le champ de vitesse eulérien $v_e(M,t)$.

III.2 Propagation d'une onde plane

On considère une onde plane se propageant vers les x croissants, de type pseudo-harmonique

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E}}_0 \exp(i(\omega t - kx))$$

où k peut être complexe et $\overrightarrow{\underline{E}}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$ (transversalité).

Conductivité du plasma On peut considérer dans le cas d'électrons non relativistes que la force de Lorentz se réduit à $\overrightarrow{F} = -eE$. On peut donc écrire le PFD pour une particule fluide de masse m

$$m\frac{D\vec{v}_e}{Dt} = -e\overrightarrow{E}$$

La force de Lorentz est dirigée perpendiculairement à la propagation. Les électrons initialement au repos ont donc un mouvement colinéaire au champ électrique. Par ailleurs, le champ $\overrightarrow{E}$ est invariant par translation sur $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, donc

$$\vec{v}_e(M,t) = v_y(x,t)\vec{e}_y + v_z(x,t)\vec{e}_z$$

ce qui fait que le terme de dérivée convective est nul

$$(\vec{v}_e \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}_e = v_y(x,t)\frac{\partial \vec{v}_e(x,t)}{\partial y} + v_z(x,t)\frac{\partial \vec{v}_e(x,t)}{\partial z} = 0$$

On peut donc réécrire le PFD

$$m\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\overrightarrow{E}$$

En notation complexe, la vitesse dépend du temps de manière harmonique, donc

$$i\omega m\underline{\vec{v}}_e = -e\overrightarrow{\underline{E}}$$

Le vecteur densité de courant est donné par $\underline{\vec{j}} = -n_0 e\underline{\vec{v}}_e$, donc

$$\underline{\vec{j}} = -i\frac{n_0 e^2}{m\omega}\overrightarrow{\underline{E}}$$

ce qui permet d'obtenir la conductivité complexe

$$\gamma = -i\frac{n_0 e^2}{m\omega}$$

Le fait que la conductivité est complexe entraine le fait que $\vec{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont en quadrature, ce qui implique que la puissance cédée aux charges $\langle \vec{j} \cdot \overrightarrow{E} \rangle$ est nulle.

Relation de dispersion L'équation de Maxwell Faraday s'écrit en notation complexe $-ik\vec{e}_x \wedge \overrightarrow{\underline{E}} = -i\omega\overrightarrow{\underline{B}}$ soit

$$k\vec{e}_x \wedge \overrightarrow{\underline{E}} = \omega\overrightarrow{\underline{B}}$$

La relation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$-ik\vec{e}_x \wedge \overrightarrow{\underline{B}} = \left(-i\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m\omega}\overrightarrow{\underline{E}} + \frac{i\omega}{c^2}\overrightarrow{\underline{E}}\right)$$

soit

$$k\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{B}} = \left(\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m\omega} - \frac{\omega}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}$$

Des équations précédentes, on déduit

$$\left(\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m\omega} - \frac{\omega}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} = k\vec{e}_x \wedge \left(\frac{k}{\omega}\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}\right) = \frac{k^2}{\omega}\vec{e}_x \wedge (\vec{e}_x \wedge (\alpha\vec{e}_y + \beta\vec{e}_z)\underline{E})$$

ce qui donne

$$\vec{e}_x \wedge (\vec{e}_x \wedge (\alpha\vec{e}_y + \beta\vec{e}_z)\underline{E}) = \vec{e}_x \wedge ((\alpha\vec{e}_z - \beta\vec{e}_y)\underline{E}) = (-\alpha\vec{e}_y - \beta\vec{e}_z)\underline{E} = -\underline{\vec{E}}$$

donc

$$\left(\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$$

On en déduit la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m}$$

On peut réécrire cette relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \frac{c^2\mu_0 n_0 e^2}{m}}{c^2} = \frac{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}{c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

qui fait apparaitre une grandeur homogène à une pulsation, la pulsation plasma (ou pulsation de Langmuir)

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$$

Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Pulsation plasma (ou pulsation de Langmuir)

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$$

III.3 Propagation, dispersion et absorption

Propagation La propagation ne peut se faire que si k est réel, c'est à dire si $k^2 > 0$. Ceci n'est possible que si $\omega > \omega_p$. dans le cas contraire, on observe dans le plasma une onde évanescente et une onde arrivant sur le plasma est réfléchie (voir chapitre suivant). La pulsation plasma agit donc comme la pulsation de coupure d'un filtre passe haut. Ce caractère est mis à profit dans la propagation des ondes radios dites "grandes ondes".

Dispersion Dans le cas ou la propagation est possible, on peut alors calculer la vitesse de phase. En effet

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{donc} \quad \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2}$$

donc

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

et la vitesse de groupe que l'on peut calculer de deux manières

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2$$

donc

$$2\omega\, d\omega = c^2 2k\, dk$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega}c^2$$

ce qui donne la relation $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$ et

$$v_g = \frac{\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}}{\omega}c^2$$

$$\omega^2 = k^2c^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

donc

$$\omega = \sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2} = c\sqrt{k^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2}}$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dk} = c\frac{2k}{\sqrt{k^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2}}}\frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$v_g = c\frac{\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}}} = c\sqrt{\frac{\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}}}$$

Finalement

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

On constate que v_φ est supérieure à c ce qui ne contredit pas la relativité restreinte dans la mesure où la phase d'une onde ne transporte pas d'information. L'information (et l'énergie) de l'onde sont transportées à la vitesse v_g qui elle est bien inférieure à c.

Absorption Dans le cas où la propagation est possible, k est réel, il n'y a donc pas d'absorption, ce qui correspond au fait que la puissance cédée aux charges est nulle en moyenne. Cette situation découle de la non prise en compte des interactions internes au plasma.