Soit un champ vectoriel qui prend la forme d'une onde plane en notation complexe

$$\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{\underline{E}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) = \overrightarrow{\underline{E}}_0 \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z))$$

On exprime la divergence du champ en coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\underline{E}} = \frac{\partial}{\partial x}(\underline{E}_{0x} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))) + \frac{\partial}{\partial y}(\underline{E}_{0y} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))) + \frac{\partial}{\partial z}(\underline{E}_{0z} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})))$$

ce qui donne après dérivation

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\underline{E}} = -ik_x \underline{E}_{0x} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) - ik_y \underline{E}_{0y} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) - ik_z \underline{E}_{0z} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

soit en regroupant

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\underline{E}} = \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \left[-ik_x \underline{E}_{0x} - ik_y \underline{E}_{0y} - ik_z \underline{E}_{0z}\right]$$

où l'on reconnait le produit scalaire $\vec{k} \cdot \overrightarrow{E}$ donc

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\underline{E}} = -i\vec{k} \cdot \overrightarrow{E}$$

On calcule le rotationnel en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z$$

Chaque dérivée est de la forme

$$\frac{\partial \underline{E}_i}{\partial j} = -ik_j \underline{E}_i$$

où i et j prennent les valeurs x, y, z. On a alors

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \left(-ik_y \underline{E}_z + ik_z \underline{E}_y\right) \vec{e}_x + \left(-ik_z \underline{E}_x + ik_x \underline{E}_z\right) \vec{e}_y + \left(-ik_x \underline{E}_y + ik_y \underline{E}_x\right) \vec{e}_z$$

En factorisant par $-i$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = (-i) \left[\left(k_y \underline{E}_z - k_z \underline{E}_y\right) \vec{e}_x + \left(k_z \underline{E}_x - k_x \underline{E}_z\right) \vec{e}_y + \left(k_x \underline{E}_y - k_y \underline{E}_x\right) \vec{e}_z\right]$$

on reconnait l'expression du produit vectoriel

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -i\vec{k} \wedge \overrightarrow{E}$$