Relations de passage

I Relations de passage

I.1 Relation de passage pour $\vec{E}$

On considère un élément de volume parallélépipédique chargé $dV = edS = edxdy$ avec une charge volumique ρ. On peut écrire l'équation de Maxwell-Gauss

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En intégrant cette relation sur l'épaisseur e que l'on fait tendre vers 0

$$\int_0^e \frac{\partial E_x}{\partial x} dz + \int_0^e \frac{\partial E_y}{\partial y} dz + \int_0^e \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = \int_0^e \frac{\rho}{\epsilon_0} dx$$

En raison de la continuité du champ $\overrightarrow{E}$ hors de la surface, les termes $\int_0^e \frac{\partial E_x}{\partial x} dz$ et $\int_e^0 \frac{\partial E_y}{\partial y} dz$ sont nuls puisque les dérivées partielles sur des coordonnées autres que z sont bornées et que l'on intègre sur une épaisseur $e \to 0$. Il reste donc

$$\int_0^e \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = E_{z2} - E_{z1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On peut donc écrire vectoriellement

$$\overrightarrow{E}_{z2} - \overrightarrow{E}_{z1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Il y a donc discontinuité de la composante normale à la surface. Par ailleurs, on peut écrire l'équation de Maxwell-Faraday

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & = & -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial Ex}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} & = & -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} & = & -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

que l'on peut intégrer de la même manière que celle de Maxwell-Gauss, ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -(E_{y2} - E_{y1}) & = & 0 \\ E_{x2} - E_{x1} & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Il n'y a donc pas de discontinuités sur les composantes sur x et y du champ $\overrightarrow{E}$. On peut donc finalement écrire

$$\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1\to 2} \qquad (1)$$

où $\vec{n}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface chargée allant de 1 vers 2.

I.2 Relation de passage pour $\vec{B}$

On considère un élément de volume parallélépipédique chargé $dV = edS = edxdy$ avec un courant volumique $\vec{j_s}$. On peut écrire l'équation de Maxwell-Thomson

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

En intégrant cette relation sur l'épaisseur e que l'on fait tendre vers 0

$$\int_0^e \frac{\partial B_x}{\partial x} dz + \int_0^e \frac{\partial B_y}{\partial y} dz + \int_0^e \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = 0$$

En raison de la continuité du champ $\overrightarrow{B}$ hors de la surface, les termes $\int_0^e \frac{\partial B_x}{\partial x} dz$ et $\int_e^0 \frac{\partial B_y}{\partial y} dz$ sont nuls puisque les dérivées partielles sont bornées et que l'on intègre sur une épaisseur $e \to 0$. Il reste donc

$$\int_0^e \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = B_{z2} - B_{z1} = 0$$

Il n'y a donc pas discontinuité de la composante normale à la surface. Par ailleurs, on peut écrire l'équation de Maxwell-Ampère

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & = & \mu_0 j_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial Bx}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & = & \mu_0 j_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} & = & \mu_0 j_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array}\right.$$

que l'on peut intégrer de la même manière que celle de Maxwell-Thomson, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} -(B_{y2} - B_{y1}) & = & \mu_0 j_{sx} \\ B_{x2} - B_{x1} & = & \mu_0 j_{sy} \\ 0 & = & \mu_0 j_{sz} \end{array}\right.$$

On peut écrire la différence entre les champs tangentiels de chaque coté de la surface

$$\overrightarrow{B}_{t2} - \overrightarrow{B}_{t1} = (B_{x2}\vec{u}_x + B_{y2}\vec{u}_y) - (B_{x1}\vec{u}_x + B_{y1}\vec{u}_y) = (B_{x2} - B_{x1})\vec{u}_x + (B_{y2} - B_{y1})\vec{u}_y$$

que l'on peut réécrire

$$(B_{x2}-B_{x1})\vec{u}_x+(B_{y2}-B_{y1})\vec{u}_y = \mu_0 j_{sy}\vec{u}_x - \mu_0 j_{sx}\vec{u}_y = \mu_0 j_{sy}\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z - \mu_0 j_{sx}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \mu_0 j_{sy}\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z + \mu_0 j_{sx}\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z$$

qui se simplifie

$$\overrightarrow{B}_{t2} - \overrightarrow{B}_{t1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

Il y a donc une discontinuité sur les composantes sur x et y du champ $\overrightarrow{B}$. On peut donc finalement écrire

$$\boxed{\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2} \qquad (2)}$$