A.1 Dans le vide, la densité de charge ρ et la densité de courants $\vec{j}$ sont nulles, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} &= 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Gauss}) && (1)\\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} &= 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Thomson}) && (2)\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell} - \text{Faraday}) && (3)\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} &= \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell} - \text{Ampère}) && (4) \end{aligned}$$

A.2

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$$

A.3 $\overrightarrow{E}_i = E_x\vec{u}_x$, donc

$$\Delta\overrightarrow{E}_i = \Delta E_x\vec{u}_x = -k^2E_x\vec{u}_x \quad et \quad \frac{\partial^2\overrightarrow{E}_i}{\partial t^2} = -\omega^2E_x\vec{u}_x$$

donc

$$k = \frac{\omega}{c}$$

A.4 L'onde est une onde plane progressive harmonique se propageant sur l'axe y vers les $y < 0$ donc

$$\overrightarrow{B}_i = \frac{\vec{k_i}\wedge\overrightarrow{E}_i}{\omega} = \frac{-k\vec{u}_y\wedge E_x\vec{u}_x}{\omega} = -cE_x(-\vec{u}_z)$$

donc

$$\overrightarrow{B}_i = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + ky)\vec{u}_z$$

A.5 σ s'exprime en $C\cdot m^{-2}$ et j_s en $A\cdot m^{-1}$.

Dans le métal, les champs sont nuls puisqu'il est considéré comme parfait ($\gamma \to +\infty$). Les relations de passages à la surface du métal s'écrivent donc, en appelant 1 le vide et 2 le métal

$$\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}_{1\to2} \quad et \quad \overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{1\to2}$$

soit

$$-\overrightarrow{E}_1 = -(\overrightarrow{E}_i + \overrightarrow{E}_r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}_{1\to2} \quad et \quad -\overrightarrow{B}_1 = -(\overrightarrow{B}_i + \overrightarrow{B}_r) = \mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{1\to2}$$

Ici, $\vec{n}_{1\to2} = -\vec{u}_y$ donc

$$\overrightarrow{E}_i + \overrightarrow{E}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_y \quad et \quad \overrightarrow{B}_i + \overrightarrow{B}_r = \mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{u}_y$$

La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue.

A.6 Le champ électrique total est la somme du champ incident et réfléchi, et il doit satisfaire à la relation de continuité. En projetant la relation de passage sur x et z, on obtient

$$E_{ix}(0) + E_{rx}(0) = 0 \quad et \quad E_{rz}(0) = 0$$

La relation de passage est valable en $y = 0$, donc

$$E_0\cos(\omega t) + E_{rx}(0) = 0$$

Comme le champ réfléchi est une OPPH, alors $E_{rx}(0) = E_{0r}\cos(\omega_r t)$, et donc

$$E_0\cos(\omega t) = -E_{0r}\cos(\omega_r t)$$

Pour que cette relation soit vraie $\forall t$, il faut que $\omega_r = \omega$.

Les lois de la réflexion de Descartes imposent que l'onde réfléchie en incidence normale soit telle que

$$\vec{k}_r = -\vec{k}_i = \vec{u}_y$$

A.7 En tout point du plan $y = 0^+$, on a donc

$$E_0\cos(\omega t) = -E_{0r}\cos(\omega t) \Rightarrow E_{0r} = -E_0$$

On a donc, en tout point du demi espace $y > 0$

$$\vec{E}_r = -E_0\cos(\omega t - ky)\vec{u}_x$$

Le champ magnétique s'obtient à nouveau avec la relation de structure des OPPH

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\vec{u}_z$$

A.8 On calcule le champ total

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0(\cos(\omega t + ky) - \cos(\omega t - ky))$$

En développant $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, on obtient

$$\vec{E}_{tot} = -2E_0\sin(\omega t)\sin(ky)\vec{u}_x$$

De la même manière, on obtient

$$\vec{B}_{tot} = 2\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(ky)\vec{u}_z$$

Ces champs représentent des ondes stationnaires pour lesquelles la partie temporelle et la partie spatiale sont découplées.

A.9 Le plan $y = 0$ est un plan nodal pour le champ électrique et un ventre pour le champ magnétique.

En utilisant les relations de passage, on trouve directement $\sigma = 0$ et

$$\vec{B}_{tot}(0) = 2\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\vec{u}_z = \mu_0\vec{j}_s \wedge \vec{u}_y$$

ce qui implique

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0\cos(\omega t)}{c\mu_0}\vec{u}_x$$

La surface du conducteur reste donc localement neutre. Par contre, l'arrivée du champ incident sur la surface met en mouvement les électrons du métal, mouvement qui est responsable du champ réfléchi produit dans le demi espace $y > 0$ et qui permet d'annuler exactement le champ électrique total sur la surface du conducteur.

A.10 L'énergie volumique est donnée par

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

On a donc pour l'onde incidente

$$u_i = \frac{\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t + ky)}{2} + \frac{E_0^2\cos^2(\omega t + ky)}{2c^2\mu_0}$$

Hors $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ donc

$$u_i = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}{2} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)$$

De la même manière

$$u_r = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)$$

Si les deux densités d'énergie n'ont pas la même expression, elles ont en revanche la même expression en moyenne temporelle

$$\langle u_i \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \langle u_r \rangle$$

A.11 On calcule le vecteur de Poynting pour les deux ondes

$$\overrightarrow{R}_i = \frac{\overrightarrow{E}_i \wedge \overrightarrow{B}_i}{\mu_0} = -\frac{E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}{c\mu_0}\vec{u}_y$$

et

$$\overrightarrow{R}_r = \frac{\overrightarrow{E}_r \wedge \overrightarrow{B}_r}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)}{c\mu_0}\vec{u}_y$$

On calcule ensuite les puissances instantanées à travers une surface $d\overrightarrow{S} = -dS\vec{u}_y$

$$P_i = \iint \overrightarrow{R}_i \cdot d\overrightarrow{S} = \iint -\frac{E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}{c\mu_0}\vec{u}_y \cdot dS\vec{u}_y = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}{c\mu_0} S$$

et de même

$$P_r = \iint \overrightarrow{R}_r \cdot d\overrightarrow{S} = \iint \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)}{c\mu_0}\vec{u}_y \cdot dS\vec{u}_y = -\frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - ky)}{c\mu_0} S$$

On a donc finalement

$$P_i = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t + ky)}{c} S = u_i c S$$

L'énergie traversant la surface vaut alors $P_i dt$, et elle se retrouve dans un cylindre s'appuyant sur S de longueur vdt où v est la vitesse de propagation de l'énergie. On a alors

$$u_i c S dt = u_i v S dt$$

ce qui implique que la vitesse de propagation de l'énergie vaut c pour l'onde incidente. On retrouve le même résultat au signe prêt pour l'onde réfléchie, le signe venant de la propagation qui s'effectue dans un sens ou dans l'autre.

A.12 En moyenne temporelle, $\langle P_i \rangle + \langle P_r \rangle = 0$. IL y a donc conservation de l'énergie électromagnétique lors de la réflexion. Toute l'énergie de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Ce caractère est du à l'absence d'effets dissipatifs, comme l'effet Joule dans le conducteur, dans la mesure où le métal est considéré comme parfait dans cette partie.

B.1 y/δ doit être sans dimension, δ a donc la dimension d'une longueur. C'est la longueur typique de pénétration du champ dans le métal.

$$\log(\delta) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}\right) = -\frac{1}{2}\log(\omega) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\mu_0 \omega}\right)$$

La courbe est donc une droite de pente $-1/2$.

B.2 la puissance volumique cédée au métal vaut

$$\frac{dP_j}{d\tau} = \vec{j}\cdot\overrightarrow{E} = \gamma E^2 = \gamma 2k^2\delta^2 E_0^2 e^{2y/\delta}\cos^2(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4})$$

En moyenne temporelle, $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ donc

$$\langle \frac{dP_j}{d\tau} \rangle = \gamma k^2\delta^2 E_0^2 e^{2y/\delta}$$

On intègre ensuite sur le volume $d\tau$ indiqué

$$\langle P_j \rangle = \iiint \gamma k^2\delta^2 E_0^2 e^{2y/\delta} dS dy = S\gamma E_0^2 k^2\delta^2 \int_0^{-L} e^{2y/\delta} dy = S\gamma E_0^2 k^2 \delta^2 \frac{\delta}{2}\left[e^{2y/\delta}\right]_0^{-L}$$

Comme $L \gg \delta$, le terme intégré vaut 0 en $-L$ et donc

$$\langle P_j \rangle = \frac{1}{2} S\gamma E_0^2 k^2 \delta^3$$

B.3 La puissance rayonnée nécessite de calculer le vecteur de Poynting

$$\overrightarrow{R}_t = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\frac{E_t B_t}{\mu_0}\vec{u}_y = -\frac{2\sqrt{2}E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}\cos(\omega t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4})\cos(\omega t + \frac{y}{\delta})e^{2y/\delta}\vec{u}_y$$

On se place en $y = 0^-$, donc

$$\overrightarrow{R}_t = -\frac{2\sqrt{2}E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\cos(\omega t)\vec{u}_y$$

On utilise $2\cos a\cos b = \cos(a-b)\cos(a+b)$, soit

$$\overrightarrow{R}_t = -\frac{\sqrt{2}E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}(\cos(2\omega t + \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}))\vec{u}_y = -\frac{\sqrt{2}E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}(\cos(2\omega t + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2})\vec{u}_y$$

En moyenne, $\cos(2\omega t + \frac{\pi}{4}) = 0$, et donc

$$\langle \overrightarrow{R}_t \rangle = -\frac{\sqrt{2}E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_y = -\frac{E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}\vec{u}_y$$

On peut alors calculer la puissance moyenne transmise à travers une surface orientée vers les $y < 0$.

$$\langle P_t \rangle = \iint \overrightarrow{R}_t \cdot d\overrightarrow{S} = \iint -\frac{E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}\vec{u}_y\cdot(-S\vec{u}_y) = \frac{E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}S$$

Si on fait le rapport entre la puissance transmise et la puissance cédée au métal

$$\frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_j \rangle} = \frac{\frac{E_0^2 k\delta}{\mu_0 c}S}{\frac{1}{2}S\gamma E_0^2 k^2\delta^3} = \frac{2}{\mu_0 c\gamma k\delta^2} = \frac{2}{\mu_0\omega\gamma\delta^2} = 1$$

Compte tenu de l'expression de δ^2. L'intégralité de la puissance transmise l'est au conducteur. Si $\gamma \to \infty$, alors ces deux puissances sont nulles et on retrouve les résultats de la fin de la première partie.

B.4 On réécrit la relation de passage pour le champ électrique, dont la composante tangentielle doit être continue, ce qui donne, en $y = 0$ et en projetant sur $\vec{u}_x$

$$E_i(y=0) + E_r(y=0) = E_t(y=0) \Rightarrow E_r(y=0) = E_t(y=0) - E_i(y=0) = \sqrt{2}k\delta E_0\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) - E_0\cos(\omega t)$$

ce qui donne le champ réfléchi

$$\overrightarrow{E}_r = \left[\sqrt{2}k\delta E_0\cos(\omega t + \frac{\pi}{4} - ky) - E_0\cos(\omega t - ky)\right]\vec{u}_x$$

On calcule le champ magnétique avec la relation de structure des ondes planes

$$\overrightarrow{B}_t = \left[\sqrt{2}k\delta\frac{E_0}{c}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4} - ky) - \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\right]\vec{u}_z$$

B.5 On calcule le vecteur de Poynting moyen

$$\vec{R}_r = \frac{1}{\mu_0}(-\vec{u}_y)\left[\sqrt{2}k\delta E_0\cos(\omega t+\frac{\pi}{4}-ky)-E_0\cos(\omega t-ky)\right]\left[\sqrt{2}k\delta\frac{E_0}{c}\cos(\omega t+\frac{\pi}{4}-ky)-\frac{E_0}{c}\cos(\omega t-ky)\right]$$

donc

$$\vec{R}_r = -\frac{E_0^2}{c\mu_0}\left[2k^2\delta^2\cos^2(\omega t+\frac{\pi}{4}-ky)+\cos^2(\omega t-ky)-2\cos(\omega t-ky)\sqrt{2}k\delta\cos(\omega t+\frac{\pi}{4}-ky)\right]\vec{u}_y$$

soit, comme $2\cos a\cos b = \cos(a-b)\cos(a+b)$

$$\vec{R}_r = -\frac{E_0^2}{c\mu_0}\left[2k^2\delta^2\cos^2(\omega t+\frac{\pi}{4}-ky)+\cos^2(\omega t-ky)-\sqrt{2}k\delta(\cos(2\omega t-2ky+\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{4}))\right]\vec{u}_y$$

En moyenne

$$\langle\vec{R}_r\rangle = -\frac{E_0^2}{c\mu_0}\left[k^2\delta^2+\frac{1}{2}-\sqrt{2}k\delta\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\vec{u}_y = -\frac{E_0^2}{c\mu_0}\left[k^2\delta^2+\frac{1}{2}-k\delta\right]\vec{u}_y$$

On peut alors calculer la puissance moyenne réfléchie à travers la surface orientée vers les $y<0$

$$\langle P_r\rangle = \frac{SE_0^2}{c\mu_0}\left[k^2\delta^2+\frac{1}{2}-k\delta\right]$$

B.6 En se limitant aux termes du premier ordre,

$$\langle P_r\rangle = \frac{SE_0^2}{c\mu_0}\left[\frac{1}{2}-k\delta\right] \quad \langle P_t\rangle = \frac{E_0^2k\delta}{\mu_0 c}S \quad \langle P_i\rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}S$$

et

$$\langle P_i\rangle = \langle P_r\rangle + \langle P_t\rangle$$

Il y a donc conservation de l'énergie.