Corrigé du DS du 29 Mars

I Réflexion d'une OPPH sur une plaque métallique

II Superposition de deux ondes planes progressives

3.1.1.1 La phase est constante, à t donné, pour $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = C$, ce qui défini un plan perpendiculaire à $\vec{k}_1$ dans l'espace.

3.1.1.2 En O, $\vec{r} = \overrightarrow{0}$. On a donc $\underline{\overrightarrow{E}}_1(O,t) = \underline{\overrightarrow{E}}_2(O,t)$ puisque la partie temporelle est identique dans les deux ondes.

3.1.1.3 Démonstration archiclassique ! Dans le vide, la densité de charge ρ et la densité de courants $\vec{j}$ sont nulles, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \overrightarrow{E} &= 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Gauss}) && (1)\\
\operatorname{div} \overrightarrow{B} &= 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Thomson}) && (2)\\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell} - \text{Faraday}) && (3)\\
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} &= \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell} - \text{Ampère}) && (4)
\end{aligned}$$

On cherche à coupler les équations entre elles. On commence par prendre la dérivée par rapport au temps de l'équation (4) ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

En inversant à gauche dérivée temporelle et dérivée spatiales, on obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

Or

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}$$

donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

On utilise alors le fait que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\operatorname{div}\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}$ et $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = 0$ pour écrire

$$\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

soit en regroupant les termes, l'équation de propagation du champ magnétique

$$\Delta\overrightarrow{E} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien se réduit ici aux dérivées de E_x par rapport à y et z, de sorte que

$$\Delta\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)\vec{u}_x$$

En décomposant le vecteur d'onde

$$\vec{k} = k_y\vec{u}_y + k_z\vec{u}_z \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = k_y y + k_z z$$

et donc

$$\Delta\overrightarrow{E} = E_x\vec{u}_x((-jk_y)^2 + (-jk_z)^2) = -\overrightarrow{E}k^2$$

En injectant chacune des deux OPPH dans l'équation de propagation, on obtient alors

$$-k_1^2\overrightarrow{E} - \epsilon_0\mu_0\overrightarrow{E}(j\omega)^2 = \overrightarrow{0} \ \ et \ \ -k_2^2\overrightarrow{E} - \epsilon_0\mu_0\overrightarrow{E}(j\omega)^2 = \overrightarrow{0}$$

On en déduit en simplifiant par $\overrightarrow{E}$ que

$$k_1^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2 \ et \ k_2^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2$$

donc que les deux vecteurs d'onde on même norme k (c'est une autre manière d'obtenir la relation de dispersion).

3.1.2 Les deux ondes sont des ondes planes, on peut donc utiliser la relation de structure des ondes planes

$$\overrightarrow{B} = \frac{\vec{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}$$

Compte tenu des notations et de la question, on décompose le vecteur d'onde

$$\vec{k}_1 = k(\cos\alpha\vec{u}_y - \sin\alpha\vec{u}_z) \ et \ \vec{k}_2 = k(\cos\alpha\vec{u}_y + \sin\alpha\vec{u}_z)$$

On a alors

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{k}{\omega}(\cos\alpha\vec{u}_y - \sin\alpha\vec{u}_z)\wedge E_1\vec{u}_x = \frac{kE_1}{\omega}(-\cos\alpha\vec{u}_z - \sin\alpha\vec{u}_y)$$

et

$$\overrightarrow{B}_2 = \frac{k}{\omega}(\cos\alpha\vec{u}_y + \sin\alpha\vec{u}_z)\wedge E_2\vec{u}_x = \frac{kE_2}{\omega}(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_y)$$

3.1.3.1

$$\overrightarrow{E}_t = E_0\exp(j\omega t)(\exp(-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}) + \exp(-j\vec{k}_2\cdot\vec{r}))\vec{u}_x$$

En décomposant le produit scalaire avec le vecteur d'onde

$$\overrightarrow{E}_t = E_0\exp(j\omega t)(\exp(-jk(y\cos\alpha - z\sin\alpha)) + \exp(-jk(y\cos\alpha + z\sin\alpha)))\vec{u}_x$$

soit

$$\overrightarrow{E}_t = E_0\exp(j\omega t)\exp(-jky\cos\alpha)(\exp(jkz\sin\alpha) + \exp(-jkz\sin\alpha))\vec{u}_x$$

ce qui donne finalement

$$\overrightarrow{E}_t = 2E_0\exp(j(\omega t - ky\cos\alpha))\cos(kz\sin\alpha)\vec{u}_x$$

On retrouve la formulation demandée avec

$$\beta = k\cos\alpha \ et \ E_{0t}(z) = E_0\cos(kz\sin\alpha)$$

3.1.3.2 Le champ total est une superposition de deux solutions de l'équation d'onde. L'équation d'onde est linéaire, donc la somme de deux solutions est toujours solution de l'équation d'onde.

3.1.3.3 La fonction cos est une fonction de période 2π. La période spatiale p de $\cos(kz \sin\alpha)$ vaut donc

$$p = \frac{2\pi}{k \sin\alpha}$$

et en introduisant la longueur d'onde dans le vide $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$$p = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

3.1.3.4 La phase du champ total est le terme de propagation

$$\varphi = \omega t - ky \cos\alpha$$

La phase se propage donc dans la direction y avec une vitesse de phase qui est la vitesse du plan d'onde

$$v_\varphi = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \varphi}{k \cos\alpha}\right) = \frac{\omega}{k\cos\alpha} = \frac{c}{\cos\alpha}$$

La vitesse de phase est donc supérieure ou égale à c ! !

3.1.4.1 Comme on a calculé les champs magnétiques des ondes planes, on va en faire la somme avec la même méthode que pour $\overrightarrow{E}$. On décompose sur chaque axe pour conserver des expressions qui tiennent sur une ligne !

$$B_{ty} = \frac{kE_0}{\omega}\exp(j\omega t)(-\sin\alpha \exp(-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \sin\alpha \exp(-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}))$$

soit

$$B_{ty} = \frac{kE_0}{\omega}\exp(j\omega t)\sin\alpha(-\exp(-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \exp(-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r})) = \frac{kE_0}{\omega}\exp(j\omega t)\sin\alpha f(y,z)$$

En décomposant le produit scalaire avec le vecteur d'onde

$$f(y,z) = -\exp(-jk(y\cos\alpha - z\sin\alpha)) + \exp(-jk(y\cos\alpha + z\sin\alpha))$$

soit

$$f(y,z) = \exp(-jky\cos\alpha)(\exp(-jkz\sin\alpha) - \exp(jkz\sin\alpha)) = -2i\exp(-jky\cos\alpha)\sin(kz\sin\alpha)$$

qui donne finalement

$$B_{ty} = -2i\frac{kE_0}{\omega}\exp(j(\omega t - ky\cos\alpha))\sin\alpha\sin(kz\sin\alpha)$$

et en notation réelle

$$B_{ty} = 2\frac{kE_0}{\omega}\sin(\omega t - ky\cos\alpha)\sin\alpha\sin(kz\sin\alpha)$$

Ce champ est longitudinal puisqu'il est selon la direction de propagation.
On fait de même pour B_{tz}, on a cette fois ci un $\cos\alpha$ en facteur et une somme d'exponentielle qui donne un terme en $-\cos(kz\sin\alpha)$ soit

$$B_{tz} = -2\frac{kE_0}{\omega}\exp(j(\omega t - ky\cos\alpha))\cos\alpha\cos(kz\sin\alpha)$$

et en notation réelle

$$B_{tz} = -2\frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\cos\alpha\cos(kz\sin\alpha)$$

qui est perpendiculaire à la direction de propagation.

3.1.4.2 Contrairement à l'onde plane, on a ici un champ magnétique qui n'est pas perpendiculaire à la direction de propagation.

3.1.4.3 Pour $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = 0$

$$\overrightarrow{E}_t = 2E_0 \exp(j(\omega t - ky))\vec{u}_x$$

soit en notation réelle

$$\overrightarrow{E}_t = 2E_0 \cos(\omega t - ky)\vec{u}_x$$

et

$$B_{ty} = 0 \quad B_{tz} = -2\frac{kE_0}{\omega}\exp(j(\omega t - ky))$$

soit en notation réelle

$$\overrightarrow{B}_T = -2\frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - ky)\vec{u}_z$$

On retrouve donc une onde plane, transversale.

Pour $\alpha = \pi/2$ $\cos\alpha = 0$ et $\sin\alpha = 1$

$$\overrightarrow{E}_t = 2E_0 \exp(j(\omega t))\cos(kz)\vec{u}_x$$

soit en notation réelle

$$\overrightarrow{E}_t = 2E_0 \cos(\omega t)\cos(kz)\vec{u}_x$$

et

$$B_{ty} = -2i\frac{kE_0}{\omega}\exp(j(\omega t))\sin(kz) \quad B_{tz} = 0$$

soit en notation réelle

$$\overrightarrow{B}_T = 2\frac{kE_0}{\omega}\sin(\omega t)\sin(kz)\vec{u}_y$$

3.2.1 Le champ total vaut

$$\overrightarrow{E}_t = 2E_0 \exp(j(\omega t - ky\cos\alpha))\cos(kz\sin\alpha)\vec{u}_x$$

On calcule

$$|E|_t^2 = 2E_0\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\cos(kz\sin\alpha)2E_0\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\cos(kz\sin\alpha)$$

ce qui donne

$$|E|_t^2 = 4E_0^2\cos^2(kz\sin\alpha)\cos^2(\omega t - ky\cos\alpha)$$

En moyenne temporelle, $\langle\cos^2(\omega t - ky\cos\alpha)\rangle = 1/2$, donc

$$\langle|E|_t^2\rangle = 2E_0^2\cos^2(kz\sin\alpha)$$

3.2.2.1 Les surfaces d'intensité maximale se situent là où le cos est maximal, soit

$$\cos^2(kz\sin\alpha) = 1 \Rightarrow kz\sin\alpha = n\pi \Rightarrow z_{n\,max} = n\frac{\pi}{k\sin\alpha}$$

Les surfaces d'intensité minimale se situent là où le cos est minimal, soit

$$\cos^2(kz\sin\alpha) = 0 \Rightarrow kz\sin\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z_{n\,min} = (2n+1)\frac{\pi}{2k\sin\alpha}$$

En introduisant la longueur d'onde

$$z_{n\,max} = n\frac{\lambda\pi}{2\pi\sin\alpha} = n\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$$

et

$$z_{n\,min} = (2n+1)\frac{\lambda\pi}{4\pi\sin\alpha} = (2n+1)\frac{\lambda}{4\sin\alpha}$$

3.2.2.2 Dans le plan $y = 0$, on observe des surfaces alternativement sombres ($z_{n\,min}$) et lumineuses ($z_{n\,max}$) pour des z constants, donc parallèles à l'axe Ox. L'interfrange est la distance entre deux franges successives de même nature

$$i = z_{n+1\,max} - z_{n\,max} = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}$$

3.3.1.1 Le vecteur de Poynting est donné par

$$\overrightarrow{R} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

en prenant soin d'utiliser les champs réels, soit ici

$$\overrightarrow{R} = \frac{E_t\vec{u}_x \wedge (B_{ty}\vec{u}_y + B_{tz}\vec{u}_z)}{\mu_0} = \frac{E_tB_{ty}\vec{u}_z - E_tB_{tz}\vec{u}_y}{\mu_0}$$

En développant et en décomposant sur chaque axe

$$R_z = \frac{2E_0\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\cos(kz\sin\alpha)2\frac{kE_0}{\omega}\sin(\omega t - ky\cos\alpha)\sin\alpha\sin(kz\sin\alpha)}{\mu_0}$$

et

$$R_y = \frac{-2E_0\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\cos(kz\sin\alpha)(-2\frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\cos\alpha\cos(kz\sin\alpha))}{\mu_0}$$

donc

$$R_z = \frac{4kE_0^2\cos(\omega t - ky\cos\alpha)\sin(\omega t - ky\cos\alpha)\cos(kz\sin\alpha)\sin(kz\sin\alpha)\sin\alpha}{\omega\mu_0}$$

soit en utilisant $\cos a\sin a = 1/2\sin(2a)$

$$R_z = \frac{kE_0^2\sin(2\omega t - 2ky\cos\alpha)\sin(2kz\sin\alpha)\sin\alpha}{\omega\mu_0}$$

et

$$R_y = \frac{4kE_0^2\cos^2(\omega t - ky\cos\alpha)\cos^2(kz\sin\alpha)\cos\alpha}{\omega\mu_0}$$

En moyenne temporelle, $\langle R_z \rangle = 0$ et

$$\langle R_y \rangle = \frac{2kE_0^2 \cos^2(kz \sin\alpha)\cos\alpha}{\omega\mu_0}$$

et donc finalement

$$\langle \overrightarrow{R} \rangle = \frac{2kE_0^2 \cos^2(kz \sin\alpha)\cos\alpha}{\omega\mu_0}\vec{u}_y$$

Les lignes de champ du vecteur de Poynting se situent donc sur $\vec{u}_y$ et représentent la direction de propagation de l'énergie, puisque le vecteur de Poynting est le vecteur densité d'énergie électromagnétique.

3.3.1.2 ????

3.3.1.3 p (qui n'est pas le même que dans la question 3.1.3.3 !) est la distance entre deux maximums successifs de $\langle \overrightarrow{R} \rangle$, donc deux maximums successifs du $\cos^2(kz\sin\alpha)$, donc (cf 3.2.2.1)

$$p = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} = i$$

La période spatiale du vecteur de Poynting est donc égale à l'interfrange.

3.3.1.4 la puissance moyenne est donnée par $P = \iint \langle \overrightarrow{R} \rangle d\overrightarrow{S}$ donc

$$P = \iint\limits_{l_x, l_z} \frac{2kE_0^2 \cos^2(kz\sin\alpha)\cos\alpha}{\omega\mu_0}\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y dxdz = \frac{2kE_0^2\cos\alpha}{\omega\mu_0}\iint\limits_{l_x, l_z} \cos^2(kz\sin\alpha)dxdz$$

On indique ici que la surface est grande devant la période spatiale, ce qui implique qu'il faut moyenner le $\cos^2(kz\sin\alpha)$ sur une grande surface, ce qui implique que l'intégration sur la surface du $\cos^2(kz\sin\alpha)$ va simplement donner un facteur 1/2, donc

$$P = \frac{kE_0^2\cos\alpha}{\omega\mu_0} l_x l_y$$

3.3.2.1 Par définition

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

On s'intéresse ici à la moyenne temporelle est spatiale de cette grandeur, donc $\cos^2(kz\sin\alpha)$ et $\sin^2(kz\sin\alpha)$ vont simplement donner un facteur 1/2, de même que $\langle \cos^2(\omega t - ky\cos\alpha) \rangle = 1/2$ et $\langle \sin^2(\omega t - ky\cos\alpha) \rangle = 1/2$. On a donc, en valeur moyennées sur le temps et l'espace

$$\langle |E|_t^2 \rangle = E_0^2$$

pour le champ magnétique $B_t^2 = B_{ty}^2 + B_{tz}^2$ donc en moyenne temporelle et spatiale

$$\langle B_t^2 \rangle = \frac{k^2E_0^2}{\omega^2}\sin^2\alpha + \frac{k^2E_0^2}{\omega^2}\cos^2\alpha = \frac{k^2E_0^2}{\omega^2}$$

On a donc finalement, en moyenne temporelle et spatiale

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{k^2E_0^2}{\omega^2}\frac{1}{2\mu_0}$$

Hors $k^2/\omega^2 = 1/c^2$ et $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$ donc

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \varepsilon_0 E_0^2$$

3.3.2.2 L'énergie qui traverse S pendant dt est égale à Pdt, donc

$$dE = \frac{kE_0^2 \cos\alpha}{\omega\mu_0} l_x l_y dt = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos\alpha l_x l_y dt$$

Par ailleurs, en appelant v_e la vitesse de propagation de l'énergie, l'énergie dE est contenue dans un cylindre de longueur $V_e dt$ et de surface $l_x l_z$. on peut donc calculer

$$dE = \langle u \rangle v_e dt l_x l_z = \varepsilon_0 E_0^2 v_e dt l_x l_z$$

En identifiant les deux expressions, on obtient

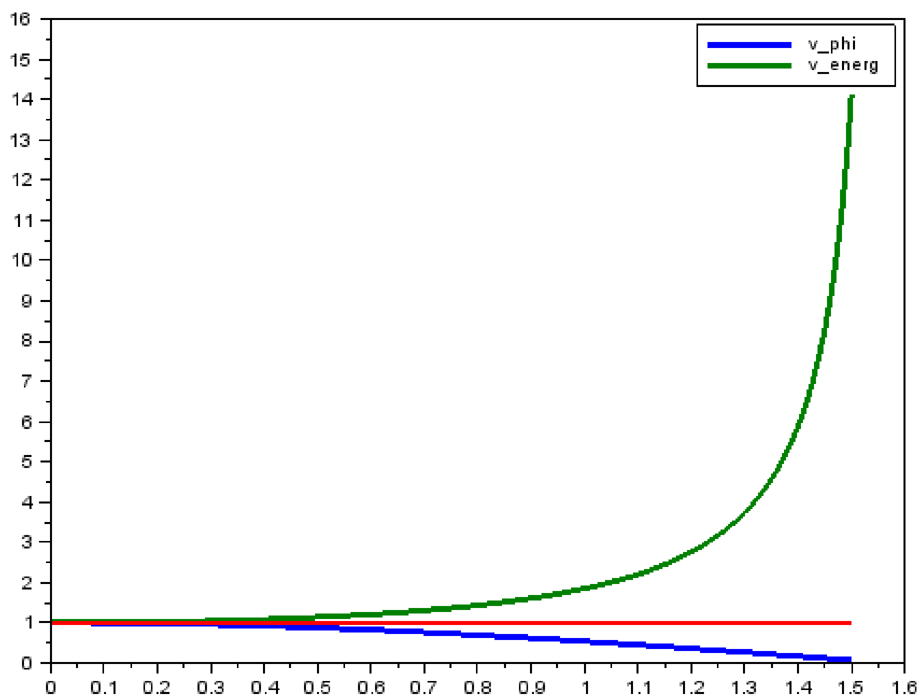
$$v_e = c\cos\alpha$$

La vitesse de propagation de l'énergie est dont inférieure ou égale à c (ouf !) et on trouve une relation simple

$$v_e v_\varphi = c^2$$

qui est en fait une relation très générale.

3.3.2.3



Quand $\alpha = 0$, la superposition des ondes donne une onde plane. La vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de phase. A l'opposé, quand $\alpha = \pi/2$, l'onde est stationnaire et la vitesse de propagation de l'énergie est nulle. Entre les deux, on a une onde qui n'est ni stationnaire ni progressive, mais un mélange entre les deux.