

Phénomènes d'interférences

L'expérience des fentes d'Young met en évidence le caractère ondulatoire. Nous allons mettre en place dans ce chapitre les méthodes nécessaires à l'étude générale des phénomènes d'interférences lumineuses en nous basant sur le modèle scalaire de la lumière.

I Interférences non localisées à deux ondes

I.1 Phénomène d'interférence

On étudie le cas particuliers de deux ondes planes progressives harmoniques émises par deux sources S_1 et S_2 représentées par $s_1(M, t) = s_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$ et $s_2(M, t) = s_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$ où les phases au point M des deux ondes sont reliées au chemin optique par la relation du chapitre précédent

$$\phi_1(M) = \omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1 M) - \varphi_{01} \quad \text{et} \quad \phi_2(M) = \omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2 M) - \varphi_{02}$$

où φ_{01} et φ_{02} représentent les phases à l'origine des ondes émises par les deux sources. L'onde résultante au point M est la somme des deux ondes

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = s_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) + s_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$$

L'éclairement est alors donné par

$$\varepsilon(M) = 2\langle s^2(M, t) \rangle = 2\langle (s_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) + s_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)))^2 \rangle$$

ce qui donne

$$\varepsilon(M) = 2\langle s_{01}^2 \cos^2(\omega_1 t - \varphi_1(M)) + s_{02}^2 \cos^2(\omega_2 t - \varphi_2(M)) + 2s_{01}s_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

Les deux premiers termes correspondent aux éclairagements obtenus si chacune des ondes était seule, et sont appelés éclairagements **monovoies** $\varepsilon_1(M)$ et $\varepsilon_2(M)$

$$\varepsilon_i(M) = 2\langle s_{0i}^2 \cos^2(\omega_i t - \varphi_i(M)) \rangle = s_{0i}^2$$

puisque la moyenne temporelle d'un \cos^2 est égale à $1/2$. On notera donc $\varepsilon_i(M) = \varepsilon_i$. L'éclairement a donc pour expression

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\langle 2s_{01}s_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

Le phénomène d'interférence consiste dans le caractère non nul du terme d'éclairement

$$\varepsilon_{12}(M) = 4\langle s_{01}s_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

qui est un terme supplémentaire apparaissant en raison du caractère ondulatoire de la lumière.

I.2 Conditions nécessaires à l'obtention d'interférences

On peut transformer l'expression précédente pour obtenir

$$\varepsilon_{12}(M) = 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\langle \cos(\omega_1 t + \omega_2 t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle$$

Le premier terme est un cos qui dépend toujours du temps puisque $\omega \geq 0$. Il reste donc le deuxième terme

$$\varepsilon_{12}(M) = 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle$$

qui est non nul si le cos ne dépend pas du temps. Cette condition est réalisée si les deux ondes sont dites **cohérentes**

Pour obtenir des interférences, les ondes qui interfèrent doivent être cohérentes :

- elles doivent avoir la même pulsation $\omega_1 = \omega_2$ (ou la même fréquence),
- la différence entre les phases à l'origine φ_{01} et φ_{02} ne doit pas varier avec le temps, ce qui implique que les deux ondes interférant appartiennent au même train d'onde. On a donc $\varphi_{01} = \varphi_{02}$.

Ces conditions impliquent l'emploi de deux sources de même longueur d'onde dans le vide et dont les phases à l'origine ne varient pas de manière aléatoire, ce qui impose l'utilisation de sources secondaires obtenues à partir d'une même source primaire (voir deuxième partie du chapitre).

Remarque : Les résultats obtenus restent vrais si les sources ne sont pas parfaitement monochromatiques, si l'écart entre les deux pulsations $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est assez petit pour que la période temporelle soit plus grande que le temps d'intégration du détecteur (voir troisième partie et étude du Michelson).

I.3 Formule des interférences à deux ondes cohérentes

I.3.1 Formule générale

Dans le cas de deux ondes cohérentes, on peut écrire la formule générale des interférences

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$$

Compte tenu du caractère cohérent des ondes, on peut écrire

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2M) - \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1M) + \underbrace{(\varphi_{01} - \varphi_{02})}_{=0}$$

Le terme d'interférence s'écrit donc en fonction de la différence de phase $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ et de la **différence de marche** $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$ (ou différence de chemin optique)

$$\varepsilon_{12}(M) = 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos(\Delta\varphi(M)) = 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)$$

et l'éclairement total est donné par

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)$$

Tout l'enjeu des problèmes d'interférences à deux ondes cohérentes consiste donc à calculer la différence de marche¹.

1. Remarque : certains dispositifs introduisent des déphasages supplémentaires, se rajoutant au déphasage du à la différence de marche (voir plus loin).

I.3.2 Formule des interférences à deux ondes cohérentes de même intensité

Dans le cas de deux ondes cohérentes de même intensité ε_0 , on peut écrire

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \right) \right]$$

Cette formule est évidemment très souvent utilisée compte tenu des contraintes pratiques imposées par la cohérence.

I.4 Analyse de l'éclairement

On se place dans le cas général où l'éclairement est donné par

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \right)$$

I.4.1 Ordre d'interférence, frange

L'ordre d'interférence est par définition le nombre réel sans dimension p

$$p = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) \frac{1}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

On peut réécrire l'éclairement en fonction de l'ordre d'interférence

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos(2\pi p)$$

L'ensemble des points M pour lesquels p (ou $\Delta\varphi$ ou δ) a la même valeur constitue un lieu d'égal éclairement appelée **frange d'interférence**.

Valeurs particulières de p

- quand p est entier, alors l'éclairement est maximal, on obtient des franges lumineuses, on dit que les ondes sont en phase, les interférences sont constructives,
- quand p est demi entier, alors l'éclairement est minimal, on obtient des franges sombre, on dit que les ondes sont en opposition de phase, les interférences sont destructives.

p	$\Delta\varphi$	δ	franges
k	$2k\pi$	$k\lambda$	lumineuses
$k + 1/2$	$(2k + 1)\pi$	$(k + 1/2)\lambda$	sombres

I.4.2 Interfrange

L'interfrange i est la distance sur l'écran d'observation entre deux franges successives de même nature.

L'interfrange dépend donc du système utilisé pour obtenir des interférences, mais aussi du système de projection optique.

I.4.3 Contraste des franges d'interférences

Le contraste \mathcal{C} mesure l'écart d'éclairement entre les franges sombres et les franges brillantes

$$\mathcal{C} = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}}$$

Dans le cas des interférences à deux ondes,

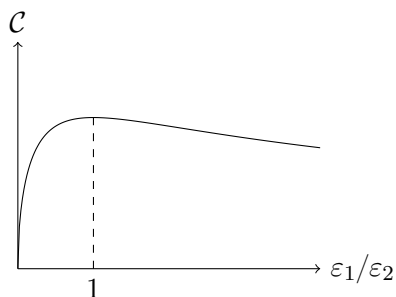
$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{min} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

et donc le contraste vaut

$$\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Cas particuliers

- si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$, alors $\mathcal{C} = 1$, avec un éclairement minimal nul et un éclairement maximal qui vaut $4\varepsilon_0$,
- si $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$, alors le contraste tend vers 0 et on ne peut plus observer les interférences,
- dans le cas général, la courbe du contraste en fonction du rapport $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ a la forme suivante



I.4.4 Formes des franges d'interférences

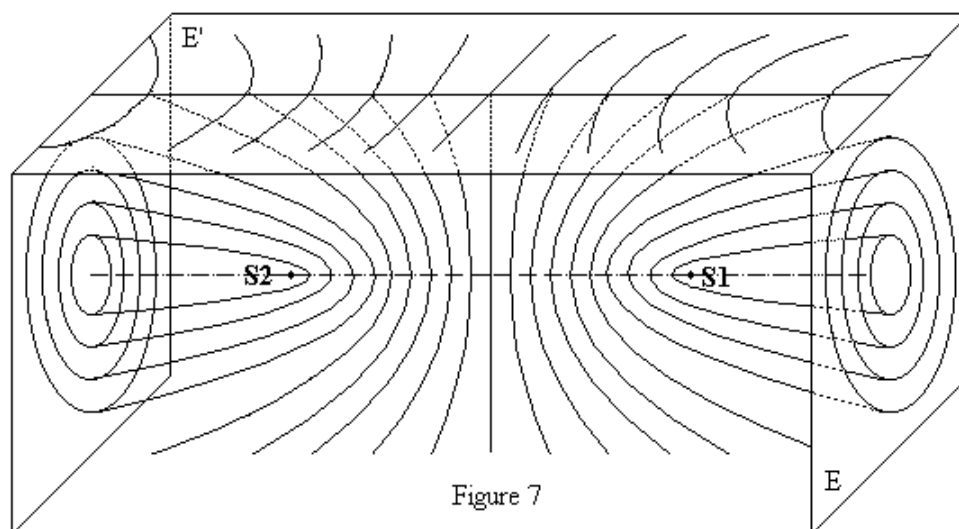
En général, les expériences se font dans l'air, donc

$$\delta(M) = S_2M - S_1M$$

Le lieu d'égal éclairement est alors donné géométriquement par

$$\delta(M) = S_2M - S_1M = K$$

ce qui correspond à la définition d'un hyperboloïde, représenté ci-dessous.



Observation dans un plan perpendiculaire à l'axe des sources Si l'écran est perpendiculaire à l'axe des sources, alors on observe des franges ayant des formes circulaires concentriques (écran E).

Observation dans un plan parallèle à l'axe des sources Si l'écran est parallèle à l'axe des sources, alors on observe des franges ayant des formes hyperboliques (écran E') qui peuvent dans certaines conditions être approximées par des franges rectilignes.

II Systèmes interférentiels à division du front d'onde : trous et fentes d'Young

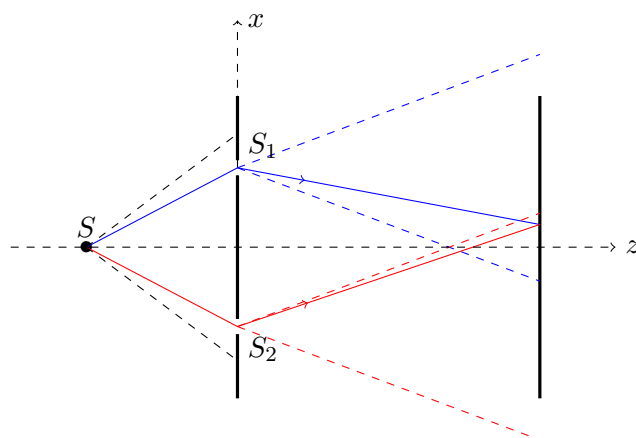
Comme nous l'avons vu dans la première partie, la condition de cohérence nécessaire à l'obtention d'interférence impose d'utiliser des dispositifs expérimentaux qui permettent de fabriquer des sources secondaires à partir d'une source primaire. Deux dispositifs sont possibles :

- La division de l'onde au niveau spatial, dite division du front d'onde,
- la division de l'amplitude de l'onde en deux parties, si possible d'intensités égales, dite division d'amplitude.

Champ d'interférences Le champ d'interférence est la région de l'espace où les deux ondes se recouvrent et peuvent donc donner un phénomène d'interférences.

II.1 Trous d'Young

Le dispositif des trous d'Young est représenté sur la figure suivante



Il permet de fabriquer deux sources secondaires S_1 et S_2 à partir de la source primaire S , monochromatique. Les deux trous sont alignés sur l'axe Ox et la distance entre elles vaut a .

En raison du phénomène de diffraction, la lumière émise par les sources secondaires est étalée et permet aux deux ondes d'interférer. Les coordonnées du point M sur l'écran sont (x, y, D) et les coordonnées des trous sont $(a/2, y, 0)$ pour S_1 et $(-a/2, y, 0)$ pour S_2 . Enfin, on fait l'hypothèse que la distance séparant les trous de l'écran D est telle que $D \gg a$ et $D \gg x$.

Calcul de la différence de marche Il faut calculer $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = SS_2 + S_2M - SS_1 - S_1M$. Comme la source primaire est sur l'axe, $SS_2 - SS_1 = 0$ et il reste à calculer

$$\delta = S_2M - S_1M$$

On exprime la distance S_1M

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4} - ax + D^2} \\ &= D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} - \frac{ax}{D^2}} \end{aligned}$$

qui fait apparaître une forme en $(1 + \varepsilon)^{1/2} \simeq 1 + 1/2\varepsilon$ donc

$$S_1M = D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} - \frac{ax}{2D^2} \right)$$

De la même manière, on obtient

$$S_2M = D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{ax}{2D^2} \right)$$

En faisant la différence, on obtient la différence de marche

$$\delta = D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{ax}{2D^2} \right) - D \left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} - \frac{ax}{2D^2} \right)$$

ce qui donne la formule de la différence de marche pour les trous d'Young.

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

Éclairement L'éclairement est donné par la formule des interférences à deux ondes de même intensité

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \right) \right] = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \right]$$

qui présente des maximums pour

$$\frac{ax}{D} \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2k\pi$$

soit pour

$$x_k = k \frac{\lambda_0 D}{a}$$

et des minimums pour

$$\frac{ax}{D} \frac{2\pi}{\lambda_0} = (2k' + 1)\pi$$

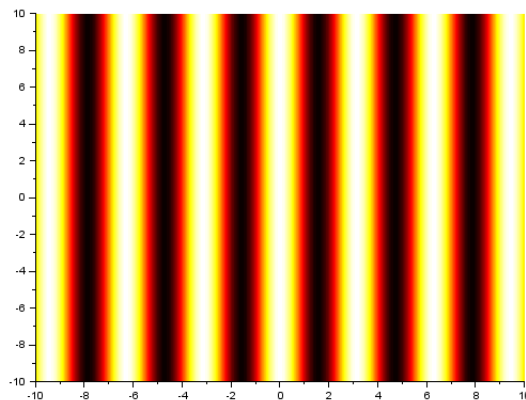
soit pour

$$x_{k'} = \left(k' + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{a}$$

On observe donc alternativement sur l'axe Ox de l'écran des raies brillantes d'abscisse x_k et des raies sombres d'abscisse $x_{k'}$. L'interfrange est alors donné par

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

que l'on peut évidemment calculer sur les franges sombres pour retrouver le même résultat.



II.2 Fentes d'Young

On constate que la différence de marche, et donc l'éclairement, ne dépendent pas de la coordonnée y . Il est donc utile, en terme de visibilité de l'expérience, d'utiliser des fentes d'Young allongées selon la direction Oy , de manière à ce qu'il n'y ait pas de phénomène de diffraction dans cette direction.

II.3 Non localisation des franges d'interférence

Le contraste est le même dans tout le champ d'interférence, ce qui signifie qu'il est possible d'observer les interférences dans tout le champ. On parle alors d'interférences non localisées.

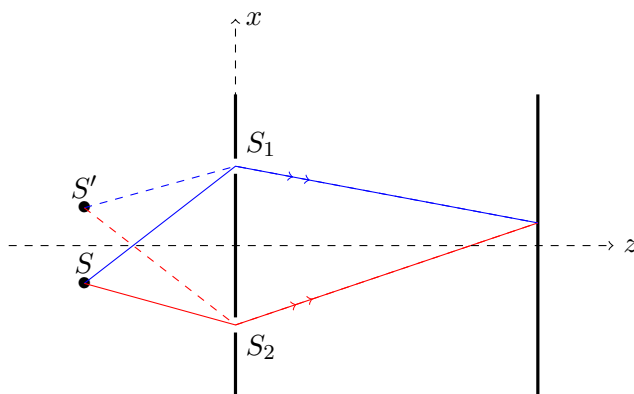
III Introduction à la notion de cohérence

III.1 Cohérence spatiale

Si une source n'est pas ponctuelle mais étendue, alors chaque élément de surface de la source se comporte comme une source élémentaire indépendante. Les ondes émises par deux sources indépendantes ayant une phase à l'origine aléatoire, les franges d'interférences dues aux différentes sources se superposent, et on observe une diminution du contraste, jusqu'à son annulation si la source est trop étendue. On parle de phénomène de **cohérence spatiale**. Nous allons étudier ce phénomène de manière semi-quantitative.

III.1.1 Interférences produites par deux sources incohérentes

Le dispositif est toujours le même, mais deux sources ponctuelles sont maintenant présentes, de même intensité, distantes de b sur l'axe Ox , et placées à une distance $D' \gg b$ des fentes d'Young



Pour les deux sources, la différence de marche après les fentes d'Young est la même que précédemment. Pour les rayons issus de la source $S'(b/2, 0, -D')$, Il faut par contre rajouter une différence de marche due à la position hors de l'axe Oz de S' .

Différence de marche pour la source S' Il faut calculer $\delta = (S'M)_2 - (S'M)_1 = S'S_2 + S_2M - S'S_1 - S_1M$. Comme précédemment $S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}$. Il reste à calculer $\delta = S'S_2 - S'S_1$. On exprime la distance $S'S_1$

$$\begin{aligned} S'S_1 &= \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + D'^2} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + D'^2} \\ &= D' \sqrt{1 + \frac{b^2}{4D'^2} + \frac{a^2}{4D'^2} - \frac{ab}{2D'^2}} \end{aligned}$$

qui fait apparaître une forme en $(1 + \varepsilon)^{1/2} \simeq 1 + 1/2\varepsilon$ donc

$$S'S_1 = D' \left(1 + \frac{b^2}{8D'^2} + \frac{a^2}{8D'^2} - \frac{ab}{4D'^2} \right)$$

De la même manière, on obtient

$$S'S_2 = D' \left(1 + \frac{b^2}{8D'^2} + \frac{a^2}{8D'^2} + \frac{ab}{4D'^2} \right)$$

En faisant la différence, on obtient la différence de marche pour la partie avant les fentes d'Young

$$\delta_{av} = D' \left(1 + \frac{b^2}{8D'^2} + \frac{a^2}{8D'^2} + \frac{ab}{4D'^2} \right) - D' \left(1 + \frac{b^2}{8D'^2} + \frac{a^2}{8D'^2} - \frac{ab}{4D'^2} \right)$$

ce qui donne la différence de marche pour la traject avant les fentes d'Young.

$$\delta_{av} = \frac{ab}{2D'}$$

à laquelle on peut associer un ordre d'interférence p_{av}

$$p_{av} = \frac{\delta_{av}}{\lambda_0} = \frac{ab}{2\lambda_0 D'}$$

Finalement, la différence de marche (et l'ordre d'interférence) pour la source S' vaut

$$\delta' = \frac{ax}{D} + \frac{ab}{2D'} \quad p' = \frac{ax}{\lambda_0 D} + \frac{ab}{2\lambda_0 D'}$$

De manière symétrique, la différence de marche totale (et l'ordre d'interférence) pour la source S vaut

$$\delta = \frac{ax}{D} - \frac{ab}{2D'} \quad p = \frac{ax}{\lambda_0 D} - \frac{ab}{2\lambda_0 D'}$$

Le chemin (2) a bien été rallongé par rapport au chemin (1) pour S' , et diminué pour S .

Éclairement Comme les deux ondes sont incohérentes, les éclaircissements s'additionnent

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon + \varepsilon' = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ab}{2D'} \right) \right) \right] + 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} - \frac{ab}{2D'} \right) \right) \right]$$

En regroupant les termes

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ab}{2D'} \right) \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{D} - \frac{ab}{2D'} \right) \right) \right]$$

et en utilisant la formule $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 + 4\varepsilon_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} \right) = 4\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} \right) \right]$$

que l'on peut écrire en fonction de l'ordre d'interférence du à la propagation avant les fentes p_{av}

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \cos (2\pi p_{av}) \right]$$

Le premier terme en cos est le même que pour une seule source. L'éclairement moyen est naturellement deux fois plus important. La principale différence est la présence du terme $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} \right)$. Ce terme a une valeur fixée pour a et b fixés, il ne dépend donc pas de la position sur l'écran. On le nomme visibilité et on le note

$$V = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} \right) = \cos (2\pi p_{av})$$

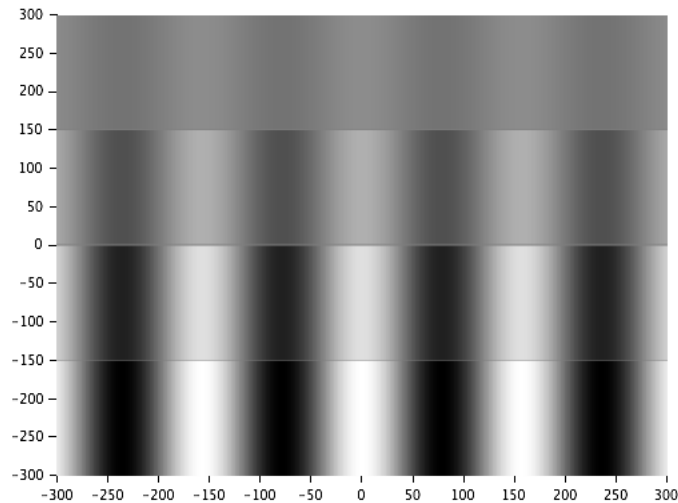
On constate que cette visibilité s'annule pour une valeur de b telle que

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{2D'} = \frac{\pi}{2}$$

donc pour

$$b = \frac{\lambda D'}{2a}$$

Le graphique suivant montre l'allure des franges d'interférences pour des visibilités $V = 1, 0.75, 0.5, 0.1$.



On observe donc une diminution de contraste progressive jusqu'à la distance b_{max} , appelée **longueur de cohérence spatiale** de la source. C'est la taille au delà de laquelle le contraste devient trop mauvais pour observer les interférences.

III.1.2 Interprétation en terme d'ordre d'interférence

La visibilité des franges d'interférences s'annule pour

$$2\pi p_{av} = \frac{\pi}{2}$$

donc pour un ordre d'interférence lié à la propagation avant les fentes

$$p_{av} = \frac{1}{4}$$

ce qui correspond à un écart entre les ordres d'interférences données par les deux sources

$$\Delta p = |p_2 - p_1| = 2p_{av} = \frac{1}{2}$$

La condition sur l'ordre d'interférence pour obtenir des franges d'interférences bien visibles est donc

$$\Delta p \leq \frac{1}{2}$$

Cette condition est évidemment à rapprocher de la condition d'ordre d'interférence demi entier pour obtenir des franges sombres : les franges sombres dues à la première source se superposent aux franges lumineuses dues à la deuxième source si elles sont espacées de manière telle que l'ordre d'interférence varie de $1/2$ entre les deux sources.

III.1.3 Interférences produites par une source étendue

Une source étendue peut être vue comme une somme de petites sources infinitésimales ponctuelles. Chaque source ponctuelle produit un système d'interférence incohérent avec les sources voisines. Les franges lumineuses et sombres de chacune des sources ponctuelles se chevauchent donc et les interférences observées sont d'autant moins visibles que la source est grande. De manière semi quantitative, on reprend comme critère de "bonne" visibilité des franges d'interférences le critère

$$\Delta \leq \frac{1}{2} \quad b \leq \frac{\lambda D'}{2a}$$

Or, pour qu'il y ait brouillage, il faut que chaque source élémentaire puisse être compensée par une source élémentaire distante de $b \leq \frac{\lambda D'}{2a}$ ce qui signifie que la source doit avoir une taille typiquement inférieure à

$$b_{max} = \frac{\lambda D'}{a} = l_s$$

appelée longueur de cohérence spatiale de la source.

Application numérique Pour une source classique monochromatique $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, et pour un dispositif classique, $D' = 0,5 \text{ m}$ et $a = 0,5 \text{ mm}$, on obtient une valeur

$$b_{max} = \frac{500 \cdot 10^{-9} \cdot 0,5}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4} = 0,5 \text{ mm}$$

Pour les systèmes à division d'amplitude comme les trous d'Young, l'utilisation d'une source étendue brouille très rapidement les interférences. Cette propriété est plutôt handicapante puisqu'elle interdit l'utilisation de sources de grande puissance lumineuse.

III.2 Cohérence temporelle

Si une source n'est pas monochromatique, alors le spectre en fréquence peut être décrit par la densité spectrale d'amplitude. Chaque "bande spectrale" élémentaire produit un système de frange d'interférences et on peut donc obtenir un brouillage, c'est à dire une atténuation du contraste. On parle de **cohérence temporelle**.

III.2.1 Interférences produites par une source produisant deux raies monochromatiques

On réalise une expérience de fentes d'Young avec une source produisant deux raies monochromatiques à des longueurs d'onde dans le vide λ_1 et λ_2 proches telles que $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \ll \lambda_1, \lambda_2$. On considère pour simplifier les calculs deux raies donnant le même éclairement monochrome ε_0 . C'est ce qui se produit expérimentalement, en bonne approximation, lorsque l'on observe avec une lampe à vapeurs de sodium.

Éclairement Les deux raies peuvent être considérées comme deux sources monochromatiques incohérentes puisque les fréquences sont différentes. On doit donc sommer les éclaircissements des deux raies, mais ici il n'y a pas besoin de recalculer les différences de marche

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_1 D} \right) \right] + 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_2 D} \right) \right]$$

donc

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 \left[1 + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_1 D} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_2 D} \right) \right]$$

et en utilisant la formule $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{ax}{D} \right) \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{ax}{D} \right) \right]$$

soit, en réduisant au même dénominateur les fractions en λ

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\pi \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 \lambda_1} \right) \frac{ax}{D} \right) \cos \left(\pi \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 \lambda_1} \right) \frac{ax}{D} \right) \right]$$

On peut alors faire les développements limités suivants, au premier ordre non nul et en posant $\lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 \lambda_1} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 \lambda_1} = \frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2} = \frac{2}{\lambda_0}$$

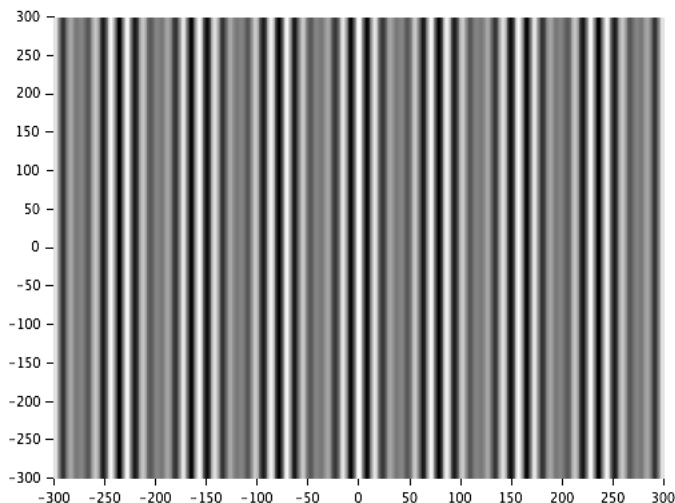
ce qui donne pour expression de l'éclairement total

$$\varepsilon_{tot} = 4\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

On reconnaît dans le deuxième terme en cos le terme d'interférence des fentes d'Young, et dans le premier terme un terme de visibilité

$$V = \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D} \right)$$

Le caractère non monochromatique se traduit donc aussi par une perte de visibilité des franges. Par contre, le terme de visibilité dépend de la position x d'observation. Il existe donc des zones de l'écran où le contraste est bon et des zones où le contraste est mauvais



Plus quantitativement, le contraste s'annule quand les franges sombres dues à une des deux raies se superposent aux franges lumineuses de l'autre, c'est à dire une variation de l'ordre d'interférence entre les deux raies de $1/2$

$$|p_1 - p_2| = \frac{1}{2}$$

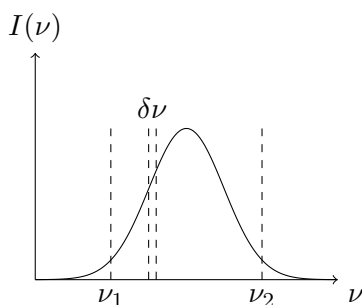
où p_1 et p_2 sont respectivement les ordres d'interférences pour la raie 1 et la raie 2.

III.2.2 Source à distribution spectrale continue

Si une source à une distribution spectrale continue $I(\nu)$, alors on peut découper cette distribution en bandes spectrales de largeur $\delta\nu$ que l'on peut considérer comme monochromatiques. Chaque bande spectrale produit alors une onde monochromatique incohérente avec les autres bandes spectrales. La somme (en fait une intégrale sur toutes les bandes de fréquence) de ces ondes donne des interférences dont la visibilité est plus faible que pour une onde monochromatique. On reprend, comme dans le cas de la cohérence spatiale, le critère de bonne visibilité suivant

$$|p_1 - p_2| \leq \frac{1}{2}$$

où p_1 et p_2 sont respectivement les ordres d'interférences pour les bandes spectrales 1 et 2 se trouvant aux "extrémités" du spectre (ce qui est facile à définir pour un spectre rectangulaire, moins pour un profil plus continu).



On l'a vu dans le chapitre précédent, le caractère monochromatique d'un signal est lié à la durée temporelle des train d'ondes. La largeur en fréquence du spectre $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ est reliée au temps de cohérence τ_c par la relation $\Delta\nu \tau_c \simeq 1$. Plus le spectre est large en fréquence ($\Delta\nu$ grand), plus il est large en longueur d'onde ($\Delta\lambda$ grand), plus le temps de cohérence est faible. Par ailleurs, plus le spectre est large en longueur d'onde, plus la visibilité des interférences devient mauvaise rapidement. La visibilité des interférences est donc d'autant plus faible que le temps de cohérence de la source est petit.

Application numérique Pour une source à vapeur de sodium, $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$, et pour une observation classique avec des fentes d'Young, $a = 0,5 \text{ mm}$ et $D = 1 \text{ m}$. On a alors annulation de la visibilité pour

$$\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \frac{ax}{D} = \frac{\pi}{2}$$

c'est à dire

$$x = \frac{\lambda_0^2 D}{2a\Delta\lambda} = \frac{(589.3 \cdot 10^{-9})^2}{2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6 \cdot 10^{-9}} \simeq \frac{600^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 6} \simeq \frac{6^2}{6^2} = 0.5 \text{ m}$$

L'interfrange vaut $i = \lambda_0 D/a$, donc il y a annulation de la visibilité pour

$$n = \frac{x}{i} = \frac{\lambda_0^2 D}{a \Delta \lambda} \frac{a}{\lambda_0 D} = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda} = \frac{589.3 \cdot 10^{-9}}{0.6 \cdot 10^{-9}} \simeq 600$$

La visibilité s'annule donc autour de la 600^{ème} frange d'interférence, alors que l'on en observe en général qu'une dizaine avec les fentes d'Young.